

# División justa y algunas de sus técnicas

Francisco Sánchez Sánchez

Ingeniería Electromecánica del ITESI San Felipe  
Marzo 20, 2015

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.
  2. Divisible, por ejemplo: dinero, o un terreno.

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.
  2. Divisible, por ejemplo: dinero, o un terreno.
- ▶ Además, el conjunto para ser dividido puede ser:

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.
  2. Divisible, por ejemplo: dinero, o un terreno.
- ▶ Además, el conjunto para ser dividido puede ser:
  1. Homogénea - como el dinero.

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.
  2. Divisible, por ejemplo: dinero, o un terreno.
- ▶ Además, el conjunto para ser dividido puede ser:
  1. Homogénea - como el dinero.
  2. Heterogéneos - como un pastel.

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.
  2. Divisible, por ejemplo: dinero, o un terreno.
- ▶ Además, el conjunto para ser dividido puede ser:
  1. Homogénea - como el dinero.
  2. Heterogéneos - como un pastel.
- ▶ Tipo de bienes:

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.
  2. Divisible, por ejemplo: dinero, o un terreno.
- ▶ Además, el conjunto para ser dividido puede ser:
  1. Homogénea - como el dinero.
  2. Heterogéneos - como un pastel.
- ▶ Tipo de bienes:
  1. Deseables - como un coche o un pastel.

## Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto  $S$  de bienes entre un conjunto de personas.
- ▶ El conjunto  $S$  puede ser de muchos tipos:
  1. Elementos indivisibles, por ejemplo: coche, departamento.
  2. Divisible, por ejemplo: dinero, o un terreno.
- ▶ Además, el conjunto para ser dividido puede ser:
  1. Homogénea - como el dinero.
  2. Heterogéneos - como un pastel.
- ▶ Tipo de bienes:
  1. Deseables - como un coche o un pastel.
  2. Indeseables - como tareas de la casa.

## Una posible descripción.

- ▶  $N = \{1, \dots, n\}$  conjunto de personas.

## Una posible descripción.

- ▶  $N = \{1, \dots, n\}$  conjunto de personas.
- ▶  $S$  un conjunto a dividir.

## Una posible descripción.

- ▶  $N = \{1, \dots, n\}$  conjunto de personas.
- ▶  $S$  un conjunto a dividir.
- ▶ Se busca una partición  $S_1, \dots, S_n$  de  $S$ .

## Una posible descripción.

- ▶  $N = \{1, \dots, n\}$  conjunto de personas.
- ▶  $S$  un conjunto a dividir.
- ▶ Se busca una partición  $S_1, \dots, S_n$  de  $S$ .
- ▶  $\mu_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ . Donde  $\mu_i(B)$  es la medida que la persona  $i$  le da al pedazo  $B$ .

$$\mu_i(S) = 1$$

## Criterios de solución.

- ▶ **Definición.** Una división  $S_1, \dots, S_n$  se dice justa si y sólo si  $\mu_i(S_i) \geq \frac{1}{n}$  para todo  $i \in N$ .

## Criterios de solución.

- ▶ **Definición.** Una división  $S_1, \dots, S_n$  se dice justa si y sólo si  $\mu_i(S_i) \geq \frac{1}{n}$  para todo  $i \in N$ .
- ▶ **Definición.** Una división  $S_1, \dots, S_n$  se dice libre de envidias si y sólo si  $\mu_i(S_i) \geq \mu_i(S_j)$ .

## Criterios de solución.

- ▶ **Definición.** Una división  $S_1, \dots, S_n$  se dice justa si y sólo si  $\mu_i(S_i) \geq \frac{1}{n}$  para todo  $i \in N$ .
- ▶ **Definición.** Una división  $S_1, \dots, S_n$  se dice libre de envidias si y sólo si  $\mu_i(S_i) \geq \mu_i(S_j)$ .
- ▶ **Lema.** *División libre de envidias implica división justa.*

## Procedimiento partes-escoges

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].

## Procedimiento partes-escoges

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]

## Procedimiento partes-escoges

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
- ▶ **Proposición.** *El procedimiento partes-escoges da una división justa, libre de envidias.*

## Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].

## Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]

## Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
- ▶ La primera y la segunda, cada una divide su parte en tres partes [de tal manera, que de acuerdo con su criterio las tres partes sean iguales].

## Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
- ▶ La primera y la segunda, cada una divide su parte en tres partes [de tal manera, que de acuerdo con su criterio las tres partes sean iguales].
- ▶ La tercera persona elige una de las partes de la primera persona y otra de la segunda persona [las que considera más grandes]

## Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
  - ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
  - ▶ La primera y la segunda, cada una divide su parte en tres partes [de tal manera, que de acuerdo con su criterio las tres partes sean iguales].
  - ▶ La tercera persona elige una de las partes de la primera persona y otra de la segunda persona [las que considera más grandes]
- 
- ▶ **Proposición.** *El procedimiento partes-escoges da una división justa.*

## Propiedades importantes.

- ▶ El diseñador del mecanismo no sabe cual va a ser el resultado correcto (óptimo).

## Propiedades importantes.

- ▶ El diseñador del mecanismo no sabe cual va a ser el resultado correcto (óptimo).
- ▶ Procede indirectamente a través del mecanismo, los participantes generan la información necesaria para alcanzar el resultado correcto u óptimo.

## Propiedades importantes.

- ▶ El diseñador del mecanismo no sabe cual va a ser el resultado correcto (óptimo).
- ▶ Procede indirectamente a través del mecanismo, los participantes generan la información necesaria para alcanzar el resultado correcto u óptimo.
- ▶ A los participantes no les interesan los objetivos del diseñador.

## Propiedades importantes.

- ▶ El diseñador del mecanismo no sabe cual va a ser el resultado correcto (óptimo).
- ▶ Procede indirectamente a través del mecanismo, los participantes generan la información necesaria para alcanzar el resultado correcto u óptimo.
- ▶ A los participantes no les interesan los objetivos del diseñador.
- ▶ El mecanismo debe tener incentivos compatibles con los participantes. Debe conciliar las metas sociales e individuales.

## Procedimiento para $n$ arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha

## Procedimiento para $n$ arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha
- ▶ Cualquiera de las personas, en cualquier momento, puede decir "alto". El réferi corta el pastel, en el lugar donde le dijeron alto. La persona que dijo alto se queda con el pedazo a la izquierda del cuchillo y sale de la repartición.

## Procedimiento para $n$ arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha
- ▶ Cualquiera de las personas, en cualquier momento, puede decir "alto". El réferi corta el pastel, en el lugar donde le dijeron alto. La persona que dijo alto se queda con el pedazo a la izquierda del cuchillo y sale de la repartición.
- ▶ El proceso se repite con las personas que quedan. La última persona se queda con el último pedazo.

## Procedimiento para $n$ arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha
- ▶ Cualquiera de las personas, en cualquier momento, puede decir "alto". El réferi corta el pastel, en el lugar donde le dijeron alto. La persona que dijo alto se queda con el pedazo a la izquierda del cuchillo y sale de la repartición.
- ▶ El proceso se repite con las personas que quedan. La última persona se queda con el último pedazo.
  
- ▶ **Proposición.** *El procedimiento de Dubins-Spanier da una división justa.*

## Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Cada persona asigna 100 puntos.

Bien	P1	P2
1	4	22
2	10	20
3	50	25
4	21	18
5	11	10
6	4	5
	100	100

## Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Cada bien se asigna al mejor postor.

Bien	P1	P2
1	4	22
2	10	20
3	50	25
4	21	18
5	11	10
6	4	5
	82	47

## Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2
1	4	22
2	10	20
3	50	25
4	21	18
5	11	10
6	4	5
	82	47

$$\frac{50}{25} = 2$$
$$\frac{21}{18} = 1.16$$
$$\frac{11}{10} = 1.1$$

## Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21	18	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	$\frac{11}{10} = 1.1$
6	4	5	
	82	47	

- ▶ Se calcula la fracción que se necesita pasar de P1 a P2.

$$82 - 11x = 47 + 10x \implies x = 1.66$$

## Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21	18	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	
6	4	5	
	71	57	

## Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21	18	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	
6	4	5	
	71	57	

- ▶ Se calcula la fracción que se necesita pasar de P1 a P2.

$$71 - 21x = 57 + 18x \implies x = 0.359$$

## Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Resulta.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21*0.641	18*0.359	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	
6	4	5	
	63.46	63.46	

## Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto

## Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto
- ▶ **Libre de envidias:** Ninguno de los jugadores prefiere lo que le tocó a otro.

## Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto
- ▶ **Libre de envidias:** Ninguno de los jugadores prefiere lo que le tocó a otro.
- ▶ **Optima de Pareto:** No hay otra asignación de tal forma que se pueda mejorar a alguno sin empeorar a otro.

## Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

## Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:

## Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:
  - ▶ Se vende el bien al mejor postor, al precio que él propuso.

## Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:
  - ▶ Se vende el bien al mejor postor, al precio que él propuso.
  - ▶ Se le da  $\frac{P_i}{n}$  a cada heredero  $i$ .  $P_i$  es el precio que  $i$  propuso.

## Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:
  - ▶ Se vende el bien al mejor postor, al precio que él propuso.
  - ▶ Se le da  $\frac{P_i}{n}$  a cada heredero  $i$ .  $P_i$  es el precio que  $i$  propuso.
  - ▶ El resto se divide en partes iguales.

## Procedimiento de Knaster para herencias

Para el primer bien:

20	40	60	120
			-120
5	10	15	30
15	15	15	15
20	25	30	-75+Bien 1

## Procedimiento de Knaster para herencias

Para el otro bien:

24	20	32	16
		-32	
6	5	8	4
2.25	2.25	2.25	2.25
8.25	7.25	-21.75	6.25

## Algoritmo "top trading cycle" (TTC).

- ▶ Cada agente,

## Algoritmo "top trading cycle" (TTC).

- ▶ Cada agente,
  - ▶ tiene un bien indivisible (casa). Inicialmente posee la casa  $h_i$ .

## Algoritmo "top trading cycle" (TTC).

- ▶ Cada agente,
  - ▶ tiene un bien indivisible (casa). Inicialmente posee la casa  $h_i$ .
  - ▶ tiene una relación de preferencia estricta sobre todas las casas.

## Algoritmo "top trading cycle" (TTC).

- ▶ Cada agente,
  - ▶ tiene un bien indivisible (casa). Inicialmente posee la casa  $h_i$ .
  - ▶ tiene una relación de preferencia estricta sobre todas las casas.
- ▶ El objetivo es intercambiar casas de tal manera que algunos mejoren sin empeorar a los demás.

## Algoritmo (TTC).

- ▶ Cada agente apunta a la casa que más prefiere (posiblemente su propia casa).

## Algoritmo (TTC).

- ▶ Cada agente apunta a la casa que más prefiere (posiblemente su propia casa).
- ▶ Esto crea una gráfica dirigida. Se identifican los ciclos.

## Algoritmo (TTC).

- ▶ Cada agente apunta a la casa que más prefiere (posiblemente su propia casa).
- ▶ Esto crea una gráfica dirigida. Se identifican los ciclos.
  - ▶ Existe al menos un ciclo.

## Algoritmo (TTC).

- ▶ Cada agente apunta a la casa que más prefiere (posiblemente su propia casa).
- ▶ Esto crea una gráfica dirigida. Se identifican los ciclos.
  - ▶ Existe al menos un ciclo.
  - ▶ Cada agente está en a lo más un ciclo.

## Algoritmo (TTC).

- ▶ Cada agente apunta a la casa que más prefiere (posiblemente su propia casa).
- ▶ Esto crea una gráfica dirigida. Se identifican los ciclos.
  - ▶ Existe al menos un ciclo.
  - ▶ Cada agente está en a lo más un ciclo.
- ▶ Se le da a cada agente en el ciclo la casa a la que apunta y se le retira del mercado.

## Algoritmo (TTC).

- ▶ Cada agente apunta a la casa que más prefiere (posiblemente su propia casa).
- ▶ Esto crea una gráfica dirigida. Se identifican los ciclos.
  - ▶ Existe al menos un ciclo.
  - ▶ Cada agente está en a lo más un ciclo.
- ▶ Se le da a cada agente en el ciclo la casa a la que apunta y se le retira del mercado.
- ▶ Si aún quedan casas/agentes sin asignar se itera.

## Algoritmo TTC (Ejemplo).

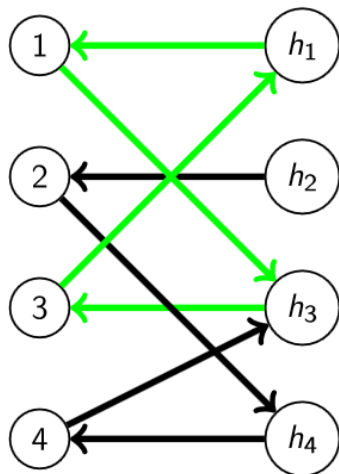
1 :  $(h_3, h_2, h_4, h_1)$

2 :  $(h_4, h_1, h_2, h_3)$

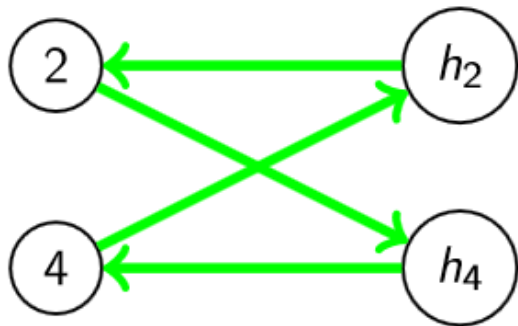
3 :  $(h_1, h_4, h_3, h_2)$

4 :  $(h_3, h_2, h_1, h_4)$






## Algoritmo TTC (Ejemplo).



## Algoritmo TTC (Ejemplo).



## Bibliografía

-  Austin, A.K. (1982) Sharing a cake. Math Gaz 6 437:212-215.
-  Brams S.J., Taylor A.D. and Zwicker W.S. (1995) Old and new moving-knife schemes. The Mathematical Intelligencer, Volume 17, Issue 4, pp 30-35.
-  Neyman J. (1946) Un theoreme d'existence. C.R. Acad Sci Paris 222:843-845.
-  Steinhaus H. (1948) The problem of fair division. Econom 16:101-104.
-  Stromquist W. (1980) How to cut a cake fairly. Am Math Mon 87:640 -644.